

Roll No.

92132

**B. A. 3rd Semester
Examination – November, 2014**

MATHEMATICS-I (Advanced Calculus)

Paper : BM-231

Time : Three hours]

[Maximum Marks : 27]

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions, selecting one question from each Section. Section-V is *compulsory*.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। खण्ड-V अनिवार्य है।

92132-7,350-(P-8)(Q-9)(14)

P. T.O.

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) Show that the function defined by :

$2\frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1-x & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is continuous only at $x = \frac{1}{2}$.

दिखाइए कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1-x & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

केवल $x = \frac{1}{2}$ पर सतत है।

- (b) State and prove Rolle's Theorem.

2

रोले के प्रमेय का उल्लेख तथा सिद्ध कीजिए।

2. (a) Evaluate :

$2\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$$

92132-7,350-(P-8)(Q-9)(14) (2)

(b) Show that :

2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

दिखाइए :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

SECTION - II

खण्ड - II

3. (a) Show that the function :

2 1/2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at $(0, 0)$.

दिखाइए कि फलन :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$ पर सतत है।

92132-7,350-(P-8)(Q-9)(14) (3)

P.T.O.

(b) If $u = f(r)$, where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, prove that : 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

यदि $u = f(r)$, जहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

4. (a) If $u = \sin^{-1}(x^2 + y^2)^{1/5}$, prove that : $2\frac{1}{2}$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{25} \tan u (2 \tan^2 u - 3)$$

यदि $u = \sin^{-1}(x^2 + y^2)^{1/5}$, सिद्ध कीजिए :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{25} \tan u (2 \tan^2 u - 3)$$

(b) Prove that : 2

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + \dots$$

सिद्ध कीजिए :

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + \dots$$

SECTION - III**खण्ड - III**

5. (a) If :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

show that $f_{xy} = f_{yx}$ at all points (x, y) . 2 $\frac{1}{2}$

यदि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

दिखाइए कि सभी बिंदुओं (x, y) पर $f_{xy} = f_{yx}$

(b) State and prove Young's Theorem.

2

यंग के प्रमेय का उल्लेख तथा सिद्ध कीजिए।

6. (a) Examine for maximum and minimum values : 2 $\frac{1}{2}$

$$\cos x + \cos y + \cos(x + y)$$

अधिकतम व न्यूनतम मान के लिए जाँच कीजिए :

$$\cos x + \cos y + \cos(x + y)$$

92132-7,350-(P-8)(Q-9)(14) (5)

P. T. O.

(b) Find the minimum value of the function $x + y + z$

subject to the condition $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$. 2

फलन $x + y + z$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए बशर्ते

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$$

SECTION - IV

खण्ड - IV

7. (a) Find the length of the curve $x = 2t, y = t^2$,

$$z = \left(\sin^{-1} t + t\sqrt{1-t^2} \right) \text{ from } t=0 \text{ to } t=\pi. \quad 2\frac{1}{2}$$

$t = 0$ से $t = \pi$ तक वक्र $x = 2t, y = t^2$,

$$z = \left(\sin^{-1} t + t\sqrt{1-t^2} \right) \text{ की लंबाई ज्ञात कीजिए।}$$

(b) Show that the curve $\vec{r} = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$ lies in a

plane. 2

दिखाइए कि वक्र $\vec{r} = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$ एक तल में

स्थित है।

8. (a) Find the radius of curvature for the curve at

$$\theta = \frac{\pi}{4} :$$

2½

$$\vec{r} = 3a \cos 2\theta \hat{i} + 4c \sin^3 \theta \hat{j} + 4c \cos^3 \theta \hat{k}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ पर वक्र की वक्रता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = 3a \cos 2\theta \hat{i} + 4c \sin^3 \theta \hat{j} + 4c \cos^3 \theta \hat{k}$$

(b) State and prove Serret-Frenet-Formulae.

2

सेरेट-फ्रेनेट के सूत्रों का उल्लेख तथा सिद्ध कीजिए।

SECTION - V

खण्ड - V

1½ each

9. (a) Give an example of a function which is discontinuous everywhere.

एक फलन का उदाहरण दीजिए जो हर जगह अस्तत हो।

(b) Write three kinds of discontinuity.

अस्तता के तीन प्रकार लिखिए।

92132-7,350-(P-8)(Q-9)(14) (7)

P.T.O.

(c) State Maclaurin's Theorem.

मैक्लारिन के प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

(d) If $z = \log(y \sin x + x \sin y)$, show that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

यदि $z = \log(y \sin x + x \sin y)$, दिखाइए कि :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

(e) State Schwarz's Theorem.

श्वार्ज के प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

(f) Define function of class m .

श्रेणी m के फलन को परिभाषित कीजिए।